Title	特異積分作用素について (Fourier解析の研究報告集)
Author(s)	小泉, 澄之
Citation	数理解析研究所講究録 (1968), 55: 33-42
Issue Date	1968-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/107791
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
55巻 1968年 33-42

特異積分作用素について

阪大 基礎工 小泉 澄之

§1. 特異積分作用素—(I)

$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ はn次元ユークリッド空間の点, または, $0=(0,0,\cdots,0)$ から $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ へのベクトルを, $|x|$はその長さ $(\sum\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}$ を表わすものとする.

$k(x)$ は次数 $-n$ の同次函数, すなわち

$$(1.1)\qquad k(\lambda x)=\lambda^{-n}k(x),\qquad \forall\, x\,;\ \lambda>0$$

を満たし, さらに, 次の性質

$$(1.2)\qquad \int_{\Sigma} k(x)\,d\sigma=0\,;\qquad (1.3)\qquad \int_{\Sigma}|k(x)|^{p}\,d\sigma<\infty$$

が成立しているものとする. ここに, $p>1$ で, Σ は単位球: $|x|=1$, $d\sigma$ は Σ 上の面積要素とする.

$f\in L^r$ $(r>1)$ ならば

$$(1.4)\qquad \tilde{f}_{\varepsilon}(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\,f(y)\,dy$$

とおくと

$$(1.5)\qquad \tilde{f}_\varepsilon(x) \longrightarrow \tilde{f}(x), \quad \text{a.e.} \quad (\text{pointwise})$$

$$(1.6)\qquad \tilde{f}_\varepsilon(x) \to \tilde{f}(x), \quad \text{in mean}$$

および

$$(1.7)\qquad \|\tilde{f}\|_r \leqq A_{r,p}\left[\int_\Sigma |k(x)|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_r$$

が成立する．この結果は，次の形式の特異積分作用素

$$(1.8)\qquad K(f) = \alpha f + \tilde{f}, \quad \alpha \text{ は complex const.}$$

の間における積（composition）の可能性を保証している．

条件(1.2)は $\tilde{f}$ の存在のための必要条件である．それは，$f(x)$ を $|x| \leqq 1$ の上の特性函数とすれば，

$$K(x) = \Omega(x')/|x|^n, \quad x' = x/|x|$$

だから

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x-y|<1} k(x-y)\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}}{r^n}dr\int_\Sigma \Omega(y')d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\log\frac{1}{\varepsilon}\int_\Sigma \Omega(y')d\sigma$$

から明白である．

例1．Hilbert変換．$n=1$ のとき，$k(x) = \Omega(x')/|x|$ で(1.2)を満たす $\Omega(x')$ は $\mathrm{sign}|x|$ に限る．従って，このときは

Hilbert 変換が得られる．すなわち

$$(1.9)\qquad Hf = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

例2．Riesz 変換．$n \geqq 2$ のとき，$k(x) = x_k / |x|^{n+1}$ とおくと (1.2) を満足する．このとき

$$(1.10)\qquad R_k f = \int \frac{x_k - y_k}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy, \quad (k=1, 2, \cdots n)$$

は Riesz 変換と呼ばれる．

(1.1)，(1.2) および (1.3) が成立しているとき，$f \in L_2$ とし，$k_{\varepsilon,\eta}(x) = k(x)$，$\varepsilon < |x| < \eta$；$= 0$，$|x| < \varepsilon$，$|x| > \eta$．とおいて，$\tilde{f}_{\varepsilon,\eta} = K_{\varepsilon,\eta} * f$ のフーリエ変換を考える．Faltung rule によって，$\hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\eta} = \hat{K}_{\varepsilon,\eta} \cdot \hat{f}$．このとき，$|x| = r$，$|y| = \rho$，$(x, y) = r\rho\cos\varphi$ とおくと，$dy = \rho^{n-1} d\rho\, d\sigma$，$k(x) = \Omega(x')/|x|^n$ だから

$$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_\Sigma d\sigma \int_\varepsilon^\eta \rho^{-1} \Omega(y') e^{-2\pi i r\rho\cos\varphi} d\rho$$

$$= \int_\Sigma \Omega(y')\, d\sigma \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i \rho\cos\varphi}}{\rho}\, d\rho$$

$g(\rho) = 1$，$\rho \leqq 1$；$= 0$，$\rho > 1$ とおいて，(1.2) を用いると

$$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_\Sigma \Omega(y')\, d\sigma \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i\rho\cos\varphi} - g(\rho)}{\rho}\, d\rho$$

ここで，

$$\left| \int_{\varepsilon r}^{\eta r} \frac{e^{-2\pi i \rho \cos\varphi} - g(\rho)}{\rho} d\rho \right| \leqq \log \frac{1}{|\cos\varphi|} + C$$

だから，$\eta \to \infty$，次に $\varepsilon \to 0$ のとき，$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x)$ は $\hat{k}(x)$ に有界収束である．従って

$$\| \hat{k}_{\varepsilon,\eta}(x) \hat{f}(x) - \hat{k}(x) \hat{f}(x) \|_2 \to 0$$

故に，$\tilde{f}$ のフーリエ変換を $\hat{\tilde{f}} = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \underset{\eta \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \hat{\tilde{f}}_{\varepsilon,\eta}$ と定義すると，

(1. 11) $$\hat{\tilde{f}}(x) = \hat{k}(x) \cdot \hat{f}(x)$$

が得られる．従って，作用素 $K(f)$ のフーリエ変換は

(1. 12) $$\hat{K}(f) = (\alpha + \hat{k}) \cdot \hat{f}$$

である．ここで

(1. 13) $$\alpha + \hat{k} = \sigma(K)$$

と書いて，これを作用素 K の symbol と呼ぶ，従って，

(1. 14) $$\hat{K}(f) = \sigma(K) \hat{f}$$

および

(1. 15) $$K(f)(x) = \int \sigma(K) \hat{f}\, e^{2\pi i (x, y)} dy$$

を得る．(1. 15) を psudo-differential operator と呼んでいる．

次に，特異積分作用素のクラスを二つ，次のように定める．

(I). 族 $\mathcal{a}$. $k(x)$ は (1.1), (1.2) を満たし，$x \neq 0$ のとき，C^∞

に属するものとする．このような核$k(x)$から生成された作用素Kの作る族を$\mathfrak{a}$で表わす．

(II) 族$\mathfrak{a}_p$ $(p>1)$．$k(x)$は(1.1), (1.2)および(1.3)を満足するものとする．このような核$k(x)$から生成された作用素Kの作る族を$\mathfrak{a}_p$で表わす．(1.7)から判るように

$$(1.16) \qquad \| K \|_p = |\alpha| + \left[\int_{\Sigma} |k(x)|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}}$$

で，作用素Kのノルムと定義する．

定理1．$\mathfrak{a}$は(I)で定義された作用素の族とする．

(i) 族$\mathfrak{a}$は作用素の和および積について閉じている．

(ii) 作用素$K \in \mathfrak{a}$の symbol $\sigma(K) = \alpha + \hat{k}$ は $x \neq 0$ でC^∞に属する，次数0の同次函数である．そして，K, Hが$\mathfrak{a}$に属するとき，

$$\sigma(K+H) = \sigma(K) + \sigma(H), \quad \sigma(K \cdot H) = \sigma(K) \cdot \sigma(H)$$

(iii) 逆に $x \neq 0$ でC^∞に属する次数0の同次函数は，$\mathfrak{a}$に属するある作用素の symbol になっている．従って，$\mathfrak{a}$に属するある作用素が$\mathfrak{a}$の中で逆元をもつための必要十分条件はその symbol が零点をもたないことである．

(iv) $$\beta(\hat{k}) = \sum_{|\alpha| \leq n+1} \sup_{|x| \geq 1} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \hat{k}(x) \right|$$

ただし，

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，各$\alpha_k$は0または正の整数で，

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

ならば

$$(1.17) \qquad \sup_{|x|=1} |k(x)| \leqq A\,\beta(\hat{k}).$$

ここに，Aはkに関係しない定数である．

証明．次の記号を用いる．

$$f\cdot g = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \qquad f*g = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$$

$$g^\lambda(x) = \lambda^n g(\lambda x), \qquad g_\lambda(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \geqq \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \end{cases}$$

$\hat{f}$はfのフーリエ変換，族$\mathcal{S}$は急減少函数の作る族とする．

$f(x)$が$|x|$だけの函数のとき，fはradialであるという．$f\in\mathcal{S}$がradialならば$\hat{f}\in\mathcal{S}$もまたradialである．

$f\cdot g = 0$, $\forall$ radial $g\in\mathcal{S}$, のとき，fをcorradialであるという．$f\cdot g = \hat{f}\cdot\hat{g}$から$f$がcorradialならば$\hat{f}$もまたcorradialである．

kが同次函数であるとき，条件(1.2)の成立とkがcorradialであることとは同値である．これは，hをradialとして，

$$k\cdot h = \int k(x)\,\overline{h(x)}\,dx = \int_0^\infty \frac{\overline{h(|x|)}}{|x|^n}\,dr \int_\Sigma \Omega(x')\,d\sigma$$

から明白である．

定理の証明は，与えられた次数の同次函数の表現に基いている．$g(x)$は族$\mathcal{S}$に属し，corradial とする．このとき，$g(0) = 0$，

$$(1.18)\quad k(x) = \int_0^\infty g^\lambda(x)\, \lambda^{-n-1+r}\, d\lambda = \int_0^{1} \{g(\lambda x) - g(0)\}\lambda^{r-1} d\lambda + \int_1^\infty g(\lambda x)\lambda^{r-1} d\lambda$$

は，$r > -1$ で絶対収束し，$k(x)$は次数 $-r$ の corradial な同次函数で，$x \neq 0$ で族 C^∞ に属する．逆に，$k(x)$ を次数 $-r$ の corradial な同次函数で，$x \neq 0$ で C^∞ に属するならば，$g(x) = k(x)\rho(|x|)$ とおく，ただし $\rho(t) \in C^\infty$，$t = 0$ および ∞ の近傍で0に等しく

$$(1.19)\qquad \int_0^\infty \lambda^{-1}\rho(\lambda)\, d\lambda = 1$$

を満たす函数とする．この $g(x)$ は明かに族$\mathcal{S}$に属し，corradial で，

$$\int_0^\infty g^\lambda(x)\,\lambda^{-n-1+r}\, d\lambda = \int_0^\infty k(\lambda x)\,\rho(|\lambda x|)\,\lambda^{-1+r}\, d\lambda$$

$$= k(x)\int_0^\infty \rho(|\lambda x|)\,\lambda^{-1}\, d\lambda = k(x)\int_0^\infty \lambda^{-1}\rho(\lambda)\, d\lambda = k(x)$$

から ~~判る~~

$\rho(x)$は radial，C^∞に属し，$\rho(0) = 1$，$\rho(x) = 0$，$|x| \geqq 1$．また，$f(x)$ は C_0^∞ に属する任意の函数とする． ~~十分大きい~~

λ に対して, $k_\lambda \cdot P = 0$ である. そして

$$\hat{f}\cdot\hat{k} \triangleq \int \hat{f}(x)\,\overline{\hat{k}(x)}\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\int f(x)\,\overline{k_\lambda(x)}\,dx$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\int [f(x)-f(0)]\,\overline{k_\lambda(x)}\,dx = \int [f(x)-f(0)P(x)]\,\overline{k(x)}\,dx$$

$[f(x)-f(0)P(x)]_{x=0} = 0$ だから, (1.17) で $r=n$ とおいた式を代入して

$$\hat{f}\cdot\hat{k} = \int [f(x)-f(0)P(x)]\,dx\,\overline{\int_0^\infty \lambda^{-1} g^\lambda(x)\,d\lambda}$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{-1}d\lambda \int [f(x)-f(0)P(x)]\,\overline{g^\lambda(x)}\,dx$$

g^λ は corradial, P は radial だから $g^\lambda\cdot P = 0$, さらに

$$\widehat{g^\lambda}(x) = \int \lambda^n g(\lambda y)\, e^{-2\pi i(x,y)}\,dy = \int g(y)\, e^{-2\pi i\left(\frac{x}{\lambda},\,y\right)}\,dy$$

$$= \lambda^n\left[\lambda^{-n}\hat{g}(\lambda^{-1}x)\right] = \lambda^n\,\hat{g}^{\lambda^{-1}}(x).$$

故に, $\lambda^{-1} = \mu$ とおいて

$$\hat{f}\cdot\hat{k} = \int_0^\infty \lambda^{-1}d\lambda \int f(x)\,\overline{g^\lambda(x)}\,dx = \int_0^\infty d\lambda \int \hat{f}(x)\,\overline{\widehat{g^\lambda}(x)}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda^n d\lambda \int \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}^{\lambda^{-1}}(x)}\,dx = \int_0^\infty \mu^{-n-1}d\mu \int \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}^{\mu}(x)}\,dx$$

$$= \int \hat{f}(x)\,dx\,\overline{\int \hat{g}^{\mu}(x)\,\mu^{-n-1}\,d\mu} = \hat{f}\cdot\int \hat{g}^{\mu}(x)\,\mu^{-n-1}\,d\mu$$

ここで，積分の順序の変更は，すべて絶対収束により保証される．そして，この関係式は C_0^∞ に属する任意の函数に対して成立している．故に

$$(1.20) \qquad k(x) = \int g^\lambda(x)\,\lambda^{-1}\,d\lambda$$

から

$$(1.21) \qquad \hat{k}(x) = \int \hat{g}^\lambda(x)\,\lambda^{-n-1}\,d\lambda$$

が導かれる． $g \in \mathcal{S}$ かつ corradial から $\hat{g}$ も $\mathcal{S}$ に属し corradial である．よって．(1.18) から判るように $\hat{k}(x)$ は $x \neq 0$ で C^∞ に属する，次数0の corradial な同次函数である．

逆に (1.21) から (1.20) が導かれることは明かであろう．これで，定理1の (i), (ii) および (iii) が，すべて証明された．

次に (iv) を証明しよう．いま述べたことから，$\hat{g}(y) = \hat{k}(y)\,p(|y|)$，ただし，$p(t) \in C^\infty$， $p(t) = 0$， $0 \leqq t < 1$，$2 < t$，(1.19) を満足する．この $\hat{g}$ を用いて，(1.21) によって，$\hat{k}$ を表現し，$g = \hat{g}^{\vee}$ を用いて (1.20) によって，k を表現する．$\vee$ はフーリエ逆変換を表わすものとする．このとき $|x| = 1$ に対して，

$$|k(x)| = \left| \int_0^\infty g(\lambda x)\,\lambda^{n-1}\,d\lambda \right|$$

$$= \sup |g(y)| \int_0^1 \lambda^{n-1} d\lambda + \sup |g(y)| |y|^{n+1} \int_1^\infty \lambda^{-2} d\lambda$$

次に，$g(x) = \hat{g}'(x)$，$\wedge'$ は逆フーリエ変換，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ として

$$\xi_k^{n+1} g(x) = (2\pi i)^{-n-1} \int \left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial \eta_k^{n+1}} \right) \hat{g}(y)\, e^{2\pi i (x, y)} dy$$

Hölder の不等式から $|x|^{n+1} \leqq n^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum |\xi_i|^{n+1}$，よって

$$|g(x)|\,|x|^{n+1} \leqq (2\pi)^{-n-1} \cdot n^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_k \int \left| \left(\frac{\partial}{\partial \eta_k^{n+1}} \right) \hat{g}(y) \right| dy$$

$$|g(x)| \leqq \int |\hat{g}(y)| dy.$$

ここに，$\hat{g}(y) = \hat{k}(y)\, \rho(|y|)$，$\rho(|y|) = 0$，$|y| < 1$，$2 < |y|$

故に，

$$|g(x)| + |x|^{n+1} |g(x)| \leqq A \sum_{|\alpha| \leqq n+1} \sup_{|x| \geqq 1} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \hat{k}(x) \right| = A \beta(\hat{k})$$

従って，

$$\sup_{|x|=1} |k(x)| \leqq A \beta(\hat{k})$$

文献

[1] A. P. Calderón - A. Zygmund : *Algebras of certain singular operators*, Amer. Journ. Math. 78 (1956) 310–321

[2] A. P. Calderón - A. Zygmund : *Singular integral operators and differential equations*, Amer. Journ. Math. 79 (1957) 901–921

[3] A. P. Calderón : *Algebras of Singular integral operators* Proc. Symposia in Pure Math., vol X. (1967) 18–55.